Unbekannte Längen oder Höhen ermitteln

Eine Mathematik Aufgabe: Erstellt von www.primadozent.de 21.2.2024

Zur Lösung der Aufgabe wird der Strahlensatz oder die 4 Strahlen verwendet.

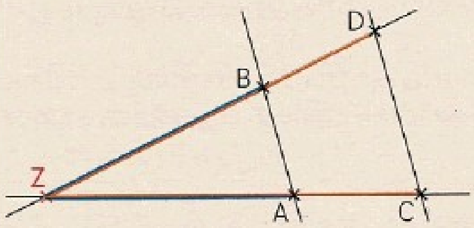
1. Als Vorrausetzung zur Anwendung der Strahlensätze sind immer ein Schnittpunkt zweier Geraden = S und zwei Parallelen nötig, die diese zwei Geraden schneiden. Ohne diese beiden Vorauusetzungen ist die Anwendung der Strahlensätze nicht möglich.
2. Wo werden die Strahlensätze angewendet:
Wenn man eine Strecke messen will, die nicht zugänglich ist, z.b. die Höhe einer Pyramide oder eines Kirchtums. Oder Der Weg über einen See oder ein nicht zugängliches Gelände.
3. Werkzeuge: Geodreieck und Arithmetik,
z.b. Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und Gleichungen
4. Vorgang, man misst die bekannten Strecken und wendet darauf die Strahlensätze an und ermittelt daraus die gesuchte Länge oder Höhe.
5.Zuerst die Regeln aus dem Mathematik 9 Buch der bayerischen Realschulen.

M

Werden zwei sich schneidende Geraden von zwei Parallelen geschnitten, gilt:

1. Strahlensatz

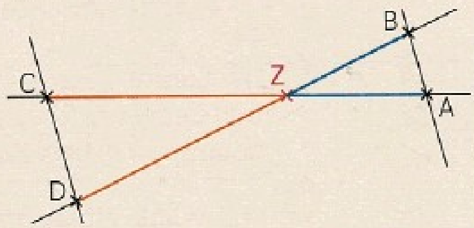
Die Längen von zwei Streckenabschnitten auf der einen Geraden verhalten sich wie die Längen entsprechender Streckenabschnitte auf der anderen Geraden.



$$\frac{|\overline{ZC}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZD}|}{|\overline{ZB}|}$$

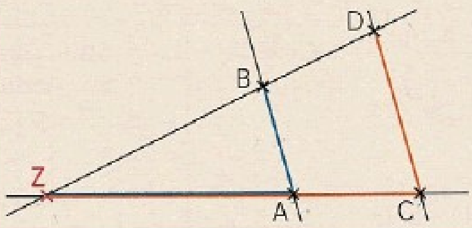
$$\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{BD}|}$$

$$\frac{|\overline{ZC}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{ZD}|}{|\overline{BD}|}$$



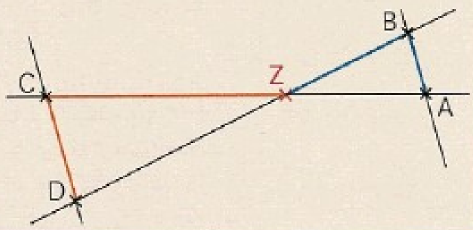
2. Strahlensatz

Die Längen der Parallelenabschnitte stehen im gleichen Verhältnis wie die entsprechenden Entfernungen ihrer Endpunkte von Z.



$$\frac{|\overline{ZC}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AB}|}$$

$$\frac{|\overline{ZD}|}{|\overline{ZB}|} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AB}|}$$



d.h. Der erste Satz bezieht sich nur auf das Verhältnis der beiden Strahlen mit dem Schnittpunkt Z. Der 2.Satz verwendet die beiden Parallelen mit den beiden Strahlen.

6. Es spielt keine Rolle, ob der Schnittpunkt ausserhalb oder zwischen den Parallen liegt.
7. Man muss also in der Anwendung zwei Strahlen finden, die sich schneiden und gleichzeitig zwei Parallelen, die diese Strahlen schneiden oder diese konstruieren.

8. Hier ist ein Beispiel:
Eine Aufgabe aus dem Mathebuch der Schulklasse9 der Realschule in Bayern

3 Ein Archäologe versucht, die Höhe der 232 m breiten Cheops-Pyramide zu ermitteln, indem er zunächst die Länge der Pyramidengrundseite abmisst. In 300 m Entfernung von der Pyramide kann er diese mit einem 20 cm langen Lineal, das er im Abstand von 57 cm vor die Augen hält, gerade noch verdecken.

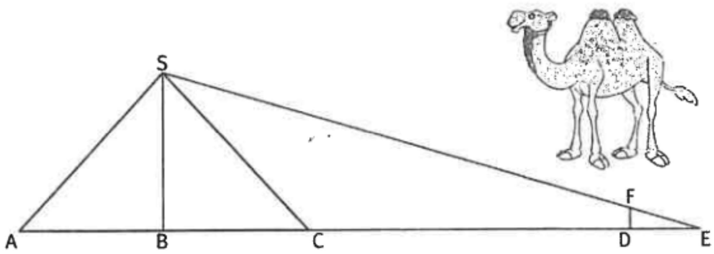
a) Beschrifte die Skizze mit den bekannten Maßen.

b) Bestimme die Länge der Strecke $\overline{BE}$?

____

____

____



c) Berechne die Höhe der Pyramide.
Runde das Ergebnis auf ganze Meter.

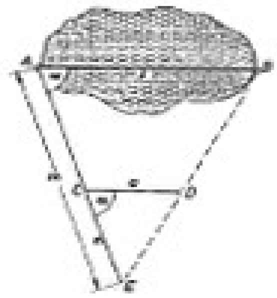
9. Zuerst wird definiert, welche Strecken bekannt sind
Die korrekte Schreibung der Strecke |AB| mit Querstrich oben schreibe ich einfach AB
Gegeben sind die Maße:
AC= 232 m
CE=300 m
FD=0,2m
ED= 0,57m
Gesucht ist die Höhe SB

10. Zuerst prüfen wir, ober die Strahelnsätze angewendet werden können.
Es gibt zwei Strahlen, die sich in E schneiden und zwei Parallelen,FD und SB,
und SB = x wollen wir wissen.
11. man wendet die Strahlensätze an und beobachtet: ED zu DF wie EB zu SB.
EB ist nicht angegeben, aber aus der halben Breite der Pyramide und dem Abstand zu errechnen, also BE= 232/2 + CE = 116 + 300 = 416.
12. daraus ergibt sich die Formel 0,57/0,2 = 416/x,
jetzt die Gleichungsregeln anwenden X= 416/(0,57/0,2) = 146
13, okay wir haben eine Zahl und vergleichen diese mit der Realität, ist das Ergebnis logisch? Also die Höhe der Pyramide soll 146m sein und seine Breite ist 232m, die Pyramide ist breiter als höher, okay, es passt irgendwie zusammen.
14. Jetzt schauen wir im Internet nach Cheops Pyramide und finden, die Höhe ist mit 146 korrekt errechnet. Aber wir lernen auch, dass die Breite 230m und die Höhe heute 138 m ist, so dass evtl. Steine abgetragen wurden oder durch Sandverwehungen die Basis höher gelegt und dadurch die gesamt Höhe geringer wurde.
15. Daraus ergibt sich die für die Lösung dieser Aufgabe irrelevante Frage,
WANN hat der Archäologe die Messungen vorgenommen, denn das muss schon vor vielen vielen Jahren oder sogar im alten Aegypten statt gefunden haben.

16. Als Schlussbemerkung sehen wir auf der Skizze ein Kamel mit zwei Höckern.
Frage an den Leser, wie könnte das Kamel in die Grössenberechnung der Pyramide sinnvoll eingebunden werden. Lassen wir das Kamel 2m hoch sein. Die Höhe der Pyramide ist nun bekannt, wir wollen den Abstand des Kames zum Betrachter herausfinden, d.h. Wie muss das Kamel oder der Betrachter positioniert werden, dass die Strahlensätze angewendet werden können. d.h. Das Kamel wird vom Kamelführer verschoben oder der Betracht geht soweit zurück oder vor, bis er eine Linie zwschen dem Höcker des Kamelss und der Pyramidespitze sieht. Wie weit ist er vom Kamel entfernt?

Ein weiteres eher praktisches Beispiel:

3) **Berechne die Entfernung der Punkte A und B, wenn die folgenden Streckenlängen vermessen wurden:**
m = 270 m, n = 90 m, a = 60 m.



Wir wollen die Länge eines Sees berechnen, also die Strecke AB
1. Zuerst prüfen wir, ob man die Strahelnsätze anwenden kann.
JA, es gibt zwei Strahlen mit Schnittpunkt E und zwei dies Strahlen schneidende Parallelen CD und AB, wobei wir die Länge AB wissen wollen.

2. Hier wird den Punkten auch eine Länge zugeordnet. Gegeben sind:
EA=m=270m
EC=n=90m
CD=a=60m
Gesucht wird: AB=x

3.Hier bedeutet gross X den gesuchten Wert, klein x das Malzeichen
Wir wenden den Stahlensatz an:n zu a wie m zu X
dh. in Formel n/a = m/X
Gleichung umformen X= m x a/n
Erst wenn die Formel steht, erst dann werden die Zahlenwerte eingesetzt
X= 270 x 60 / 90, mit TaschenRechner: =180

4.Wir vergleichen das Bild. Die Länge des Sees ist kleiner als von Punkt E zu A. Optisch ok.

5.Der schlaue Praktiker, der nicht so gerne mit mathematischen Formen arbeitet, sucht nun nach weiteren Lösungsmöglichkeiten.

6. Wie könnte man die Länge des unzugänglichen Sees noch messen ?
Variate 1. Wir hängen ein Seil an ein Boot, befahren den See von A nach B, straffen das Seil, markieren es und messen daraus plus Länge des Bootes die Länge des Sees.

Variante 2: Wir legen bei A und B den rechten Winkel an, man erinnert sich an den Satz des Pythagoras a^2 + b^2 = c^2. Dies kann man leicht mit den Zahlen 3 und 4 und 5 realisieren: 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2= 25, 9+16= 25.

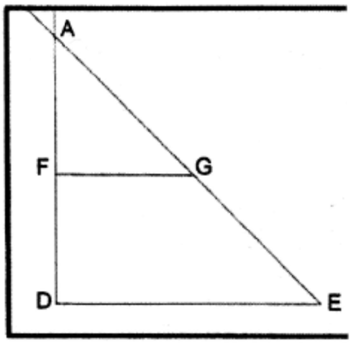
Nun zieht man die Senkrechten zu AB in A und B in gleicher Länge so lange vom See weg, bis man betretbaren Boden findet und misst die Abstände vom neuen A und neuem B.
Gibt es weitere Möglichkeiten, die Länge des Sees zu berechnen bzw. zu messen?

Denn merke, dem Ingeniör ist nichts zu schwör

Auch aus Fehlern kann man lernen, hier ist ein Beispiel der falschen Anwendung der Strahlensätze angegeben, wie lautet die richtige Relation und was wurde falsch gemacht.

3) Betrachte die nebenstehende Skizze.
$|\overline{DE}|$ sollte berechnet werden. Leider wurde im nachfolgenden Ansatz ein Fehler gemacht. Nenne den Fehler in Worten und schreibe den Ansatz korrigiert auf. (2 P.)

$$\frac{|\overline{AG}|}{|\overline{GE}|} = \frac{|\overline{FG}|}{|\overline{DE}|}$$



Der Anwender schreibt, die Strecke AG zu GE verhält sich wie FG zu DE.
Längenangaben spielen hier keine Rolle, es geht nur um das Streckenverhältnis also AG zu GE ist wie xx zu yy ???

Was ist die richtige Relation und was hat er falsch betrachtet, bzw. gegen welche Strahlenregel hat er verstossen?